

УДК 621.833.6

## К вопросу определения запаса самоторможения самотормозящихся зубчатых механизмов

**Г.А. Тимофеев**

*Рассмотрены два подхода определения запаса самоторможения в зубчатых механизмах (детерминированный и вероятностный) для обеспечения заранее заданного запаса надежности в создаваемых механизмах. На примере цилиндрической зубчатой передачи показано использование вероятностного метода определения запаса самоторможения.*

**Ключевые слова:** зубчатый механизм, условия самоторможения, границы изменения коэффициента трения, детерминированный или вероятностный метод, дисперсия.

## On the Determination of the Stock Self-Locking, Self-Locking Gear Mechanisms

**G.A. Timofeev**

*The article describes two approaches for the determination of the stock of self-locking gear mechanism (deterministic and probabilistic) to create a mechanism should have a predetermined safety margin. On the example of helical gear the use of a probabilistic method to determine the stock of self-braking is shown.*

**Keywords:** gear mechanism, self-locking conditions, the limits of the friction coefficient variation, deterministic or probabilistic method variance.

Широкому внедрению самотормозящихся зубчатых механизмов в инженерную практику мешает их недостаточная исследованность, их склонность в режиме оттормаживания к вибрациям, а также сомнения конструкторов в надежности самоторможения. Основой для таких сомнений служит непостоянство при работе зубчатых механизмов коэффициентов трения в кинематических парах, которые зависят от множества факторов: вида и характеристики смазки, скоростей скольжения, температуры, степени приработки контактирующих поверхностей и т. д. Поэтому при проектировании самотормозящихся зубчатых механизмов важно уметь определять запас самоторможения, чтобы создаваемый механизм имел заранее заданный запас надежности.

При этом возможны два подхода: детерминированный и вероятностный. Первый подход предусматривает задание верхних и нижних границ изменения коэффициентов трения и подстановку в условие самоторможения нижних значений коэффициентов, а в условия работоспособности — верхних. Таким образом, условия самоторможения



**ТИМОФЕЕВ**

**Геннадий Алексеевич**  
доктор технических наук,  
профессор, зав. кафедрой  
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

**TIMOFEEV**

**Gennady Alekseevich**  
Dr. Sc. (Eng.), Professor,  
Head of Department  
(Moscow, Russian Federation,  
MSTU named  
after N.E. Bauman)

прямого хода  $\tau_i|_{Q_u=0} > 1$  и обратного хода  $\tau_i|_{Q_m=0} > 1$  имеют вид [1]:

$$\tau_i(\min f_{ij})|_{Q_u=0} > 1, j=1, 2, \dots, l;$$

$$\tau_i(\min f_{ij})|_{Q_m=0} > 1, j=1, 2, \dots, l.$$

Напротив, в условия работоспособности прямого и обратного хода должны входить наибольшие значения коэффициентов трения:

$$0 \leq \eta_{ln}(\max f_{ij}) < 1, i, j = l, \dots, n; \tag{1}$$

$$0 \leq \eta_{n1}(\max f_{ij}) < 1, i, j = l, \dots, n.$$

Условия работоспособности при прямом и обратном ходе можно выразить и через параметры торможения движения звеньев [2]:

$$\tau_i(\max f_i) < 1, i = 1, 2, \dots, n.$$

Если эффект самоторможения наступает уже при наименьших значениях коэффициентов трения, он будет иметь место при остальных значениях. И наоборот: если условия работоспособности выполняются при наибольших значениях, то и при остальных будет обеспечено свободное относительное движение. Диапазоны изменения коэффициентов трения приведены в обширной справочной и специальной литературе по триботехнике [3–10].

Метод экспертных оценок позволяет на основании большого количества справочных данных для каждой пары материалов указать реальный диапазон изменения коэффициентов трения. Решающее достоинство такого подхода в его простоте, недостатки — субъективизм при выборе диапазона и трудности при формализации.

Второй (вероятностный) подход предусматривает задание средних значений коэффициентов трения и их дисперсий, т. е. рассматривает коэффициенты трения как случайные величины с заданными законами распределения, обычно нормальными [12]. Тогда параметр торможения становится функцией «l» независимых случайных величин, характеризующих неидеальные связи, наложенные на i-е звено. Ис-

пользуя предложенную профессором Д.Н. Решетовым общую методику расчета деталей машин с учетом рассеяния значений параметров [12], разложим эту функцию в ряд Тейлора и линеаризуем:

$$\tau_i = \tau_i(M_{i1}, M_{i2}, \dots, M_{il}) + \sum_{j=1}^l \frac{d\tau_i(M_{ij})}{df_{ij}}(f_{ij} - M_{ij}), \tag{2}$$

где  $M_{ij}$  — математическое ожидание j-го коэффициента трения. Тогда максимальное значение параметра торможения связано с его математическим ожиданием зависимостью

$$\max \tau_i = \tau_i(M_{i1}, M_{i2}, \dots, M_{il}) + u_p S_i,$$

где  $u_p$  — квантиль нормального распределения, соответствующий заданной вероятности P;  $S_i$  — среднее квадратическое отклонение,

$$S_i = \sqrt{\sum_{j=1}^l \left[ \frac{d\tau_i(M_{ij})}{df_{ij}} \right]^2} S_{ij}^2. \tag{3}$$

Если задать верхнюю и нижнюю границы изменения коэффициентов трения и принять, что среднее квадратическое отклонение в K раз меньше разности граничных значений, то

$$S_{ij} = \frac{\max f_{ij} - \min f_{ij}}{K}.$$

Второй подход не обладает простотой первого, однако точнее отражает вероятностную природу коэффициентов трения, а значит, и параметров торможения и позволяет проектировать механизм с наперед заданным запасом самоторможения.

Дополнительные виды трения (трение качения и верчения в зацеплениях, трения в опорах и т. д.) можно учесть добавлением в уравнения равновесия или движения соответствующих сил или моментов трения, либо ввести обобщенный коэффициент трения  $f_{ij}^*$ :

$$f_{ij}^* = \frac{f_{ij}}{1 - \Psi_{ij}},$$

где  $\Psi_{ij}$  — безразмерный коэффициент, учитывающий все дополнительные виды трения.

Чтобы оценить надежность самоторможения цилиндрических передач, состоящих из шестерни и колеса, найдем ту величину угла наклона зуба шестерни  $\beta_1$ , которая обеспечит самоторможение с любой наперед заданной вероятностью  $P$ . Введем вспомогательную функцию  $B$  [11]:

$$B(f; \beta_b) = \sin \beta_b \sqrt{f^2 + \frac{1}{\cos^2 \beta_b}}, \quad (4)$$

где  $f$  — коэффициент трения скольжения в зацеплении;  $\beta_b$  — угол наклона зуба на основной окружности.

Будем рассматривать заданную формулой (4) функцию  $B$  как функцию случайной величины  $f$ . Предположим, что эта случайная величина подчиняется нормальному закону распределения с математическим ожиданием  $M(f) = f_0$  и средним квадратическим отклонением  $\sigma(f)$ .

Для нахождения искомого угла по методу Д.Н. Решетова [12] необходимо линеаризовать функцию  $B$ :

$$B(f; \beta_b) = \sin \beta_b \sqrt{\frac{1}{f_0^2} + \frac{1}{\cos^2 \beta_b}} - \frac{\sin \beta_b}{f_0^2 \sqrt{1 + \frac{f_0^2}{\cos^2 \beta_b}}} (f - f_0).$$

Тогда угол  $f_p$ , соответствующий заданной вероятности  $P$ , определится по формуле:

$$\beta_p = \arctg[M(B) - u_p \sigma(B)], \quad (5)$$

где  $M(B)$  — математическое ожидание функции  $B$ ,

$$M(B) = \sin \beta_b \sqrt{\frac{1}{f^2} + \frac{1}{\cos^2 \beta_b}}; \quad (6)$$

$u_p$  — квантиль нормального распределения;  $\sigma(B)$  — среднее квадратическое отклонение функции  $B$ ,

$$\sigma(B) = \sin \beta_b \frac{\max f - \min f}{6 f_0^2 \sqrt{1 + \frac{f_0^2}{\cos^2 \beta_b}}}. \quad (7)$$

При геометрическом расчете цилиндрических самотормозящихся передач при обратном ходе передач значение угла наклона зубьев шестерни принимается бóльшим по сравнению с  $\beta_p$  на величину  $\Delta\beta$ :

$$\Delta\beta = \beta_{y1} - \beta_p.$$

При увеличении  $\Delta\beta$  надежность самоторможения возрастает, поскольку создается некоторый запас по углу.

Аналогично можно линеаризовать выражение для запаса торможения  $t$ , которое при учете только трения скольжения в зацеплении принимает вид:

$$t(f; \alpha_{y1}; \beta_b) = f_0 \frac{\operatorname{tg} \alpha_{y1}}{\cos \beta_b} + (f - f_0) \frac{\operatorname{tg} \alpha_{y1}}{\cos \beta_b},$$

где  $\alpha_{y1}$  — угол профиля в торцовом сечении на окружности произвольного радиуса  $r_{y1}$ .

Тогда запас торможения определяется зависимостью

$$t = \frac{\operatorname{tg} \alpha_{y1}}{\cos \beta_b} \left( f_0 + u_p \frac{\max f - \min f}{6} \right). \quad (8)$$

Проиллюстрируем полученные зависимости численным примером. Пусть  $\min f = 0,076$ ;  $\max f = 0,124$ ;  $f_0 = 0,1$ . Требуется оценить запас самоторможения с вероятностью  $P = 0,99$ .

При стандартном значении угла профиля колеса в нормальном сечении  $\alpha_{ny2} = 20^\circ$  угол наклона его зубьев из условий самоторможения [11] должен быть меньше  $82^\circ 50'$ . Приняв  $\beta_{y2} = 82^\circ$ , получим значение  $\beta_b = 68^\circ 31'$ . Из условий самоторможения находим  $\beta_{y1} \geq 85^\circ 26'$ . Принимаем  $\beta_{y1} = 86^\circ 30'$ . По формулам (6) и (7) находим математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение функции  $B$ :  $M(B) = 9,646$ ;  $\sigma(B) = 0,718$ .

Вероятности  $P = 0,99$  соответствует значение  $u_p = -2,326$  [12], с помощью которого по формуле (5) определяем значение угла наклона, обеспечивающее самоторможение с заданной вероятностью  $\beta_p = 84^\circ 57'$ . Разность между этим углом и принятым значением  $\beta_{y1}$  находим по формуле (2):  $\Delta\beta = 1^\circ 33'$ .

Принятому значению  $\beta_{y1}$  соответствует угол  $\alpha_{y1} = 81^\circ 04'$ . Запас торможения, соответствующий

ший заданной вероятности, определим по формуле (8):  $t = 1,413$ .

Результаты подобного расчета для некоторых других вероятностей приведены в таблице, а соответствующие зависимости — на рисунке. На рисунке видно, что при увеличении требуемой вероятности значение  $\beta_p$  возрастает, что приводит к уменьшению разности  $\Delta\beta$  и запаса торможения  $t$ .

**Запас самоторможения цилиндрических передач при различных значениях требуемой вероятности (Исходные данные:  $\min f = 0,076$ ;  $\max f = 0,124$ ;  $f_0 = 0,1$ ;  $\alpha_{ny2} = 20^\circ$ . Принятые значения:  $\beta_{y1} = 86^\circ 30'$ ;  $\beta_{y2} = 82^\circ$ )**

$P$	$u_p[12]$	$\beta_p(1)$	$\Delta\beta(2)$	$t(3)$
0,5	0,000	83°48'	2°25'	1,736
0,6	-0,253	84°11'	2°19'	1,701
0,7	-0,524	84°18'	2°12'	1,663
0,8	-0,788	84°25'	2°05'	1,626
0,9	-1,282	84°35'	1°55'	1,558
0,95	-1,645	84°43'	1°47'	1,507
0,96	-1,751	84°46'	1°44'	1,493
0,97	-1,881	84°48'	1°42'	1,474
0,98	-2,054	84°52'	1°38'	1,450
0,99	-2,326	84°57'	1°33'	1,423
0,995	-2,576	85°02'	1°28'	1,378
0,996	-2,652	85°03'	1°27'	1,367
0,997	-2,748	85°05'	1°25'	1,354
0,998	-2,878	85°07'	1°23'	1,336
0,999	-3,090	85°11'	1°19'	1,307
0,9995	-3,291	85°14'	1°16'	1,279
0,9999	-3,719	85°22'	1°08'	1,219

### Литература

1. Тимофеев Г.А., Панюхин В.В. Метод определения областей самоторможения механизмов // Вестник МГТУ. Сер. Машиностроение. 2001. № 1. С. 93—105.
2. Панюхин В.И. Самотормозящиеся механизмы. Владимир: Изд-во Владимирского обл. совета НТО, 1981. 58 с.
3. Браун Э.Д., Евдокимов Ю.А., Чичинадзе А.В. Моделирование трения и изнашивания в машинах. М.: Машиностроение, 1982. 192 с.
4. Дроздов Ю.Н., Павлов В.Г., Пучков В.Н. Трение и износ в экстремальных условиях: Справочник. М.: Машиностроение, 1986. 224 с.
5. Крагельский И.В., Виноградов И.Э. Коэффициенты трения: Справочное пособие. М.: Наука, 1984. 831 с.

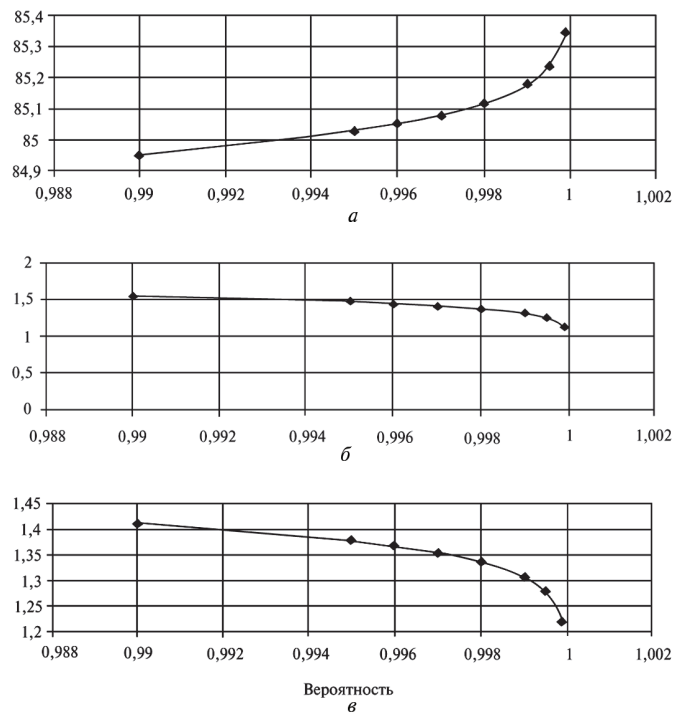


Рисунок. Зависимость от вероятности  $P$ :

$a$  — угла наклона зуба шестерни;  $b$  — запаса по углу наклона;  $v$  — запаса торможения

6. Крагельский И.В., Добычин М.Н., Камбалов В.С. Основы расчетов на трение и износ. М.: Машиностроение, 1977. 526 с.
7. Мур Д. Основы и применения трибоники: Пер. с англ. С.А. Харламова. М.: Мир, 1978. 488 с.
8. Саввин А.П. Запас самоторможения как способ оценки надежности самотормозящихся механизмов // Вестник машиностроения. 1960. № 7. С. 10—14.
9. Трение, изнашивание и смазка: Справочник. В 2-х кн. / Под ред. И.В. Крагельского, В.В. Аликина. М.: Машиностроение, 1979. Кн. 2. 358 с.
10. Турнаев А.Л. Теория и расчет некоторых самотормозящихся механизмов с высоким коэффициентом полезного действия // Труды ин-та машиноведения. Семинар по ТММ. 1959. Т. XIX. Вып. 73. С. 15—38.
11. Тимофеев Г.А., Панюхин В.В. Эвольвентные самотормозящиеся передачи равносмещенного зацепления // В кн. Элементы и устройства робототехнических систем: Межвузовский сборник. М., 1988. С. 89—92.
12. Решетов Д.Н. Работоспособность и надежность деталей машин. М.: Высшая школа, 1974. 206 с.

### References

1. Timofeev G.A., Paniukhin V.V. Metod opredeleniia oblastei samotormozheniia mekhanizmov [Method of determining the areas of self-braking mechanisms]. *Vestnik MGTU. Ser. Mashinostroenie*. 2001, no. 1, pp. 93—105.
2. Paniukhin V.I. Samotormozhiaschiesia mekhanizmy [Self-locking mechanisms]. Vladimir, Vladimirkii oblastnoi sovets NTO publ., 1981. 58 p.
3. Braun E.D., Evdokimov Yu.A., Chichinadze A.V. *Modelirovanie treniia i iznashivaniia v mashinakh* [Modeling of friction and wear in machines]. Moscow, Mashinostroenie publ., 1982. 192 p.

4. Drozdov Iu.N., Pavlov V.G., Puchkov V.N. *Trenie i iznos v ekstremal'nykh usloviakh: Spravochnik* [Friction and wear in extreme conditions: A Handbook]. Moscow, Mashinostroenie publ., 1986. 224 p.

5. Kragel'skii I.V., Vinogradov I.E. *Koeffitsienty trenia: Spravochnoe posobie* [The coefficients of friction: A Reference Guide]. Moscow, Nauka publ., 1984. 831p.

6. Kragel'skii I.V., Dobychin M.N., Kambalov V.S. *Osnovy raschetov na trenie i iznos* [Basis of calculations for friction and wear]. Moscow, Mashinostroenie publ., 1977. 526 p.

7. Mur D. *Osnovy i primeniia triboniki* [Fundamentals and applications triboniki]. Moscow, Mir publ., 1978. 488 p.

8. Savvin A.P. *Zapas samotormozheniia kak sposob otsenki nadezhnosti samotormozhishchikhsia mekhanizmov* [Reserve as a way of self-locking, self-locking mechanisms for assessing the reliability]. *Vestnik mashinostroeniia*. 1960, no. 7, pp. 10–14.

9. *Trenie, iznashivanie i smazka: Spravochnik* [Friction, wear and lubrication: A Handbook]. Ed. I.V. Kragel'sk, V.V. Alisin. Moscow, Mashinostroenie publ., 1979. Book 2. 358 p.

10. Turpaev A.L. *Teoriia i raschet nekotorykh samotormozhishchikh mekhanizmov s vysokim koeffitsientom poleznogo deistviia* [Theory and calculation of some self-locking mechanisms, high efficiency]. *Trudy instituta mashinovedeniia*, 1959, vol. XIX, no. 73, pp. 15–38.

11. Timofeev G.A., Paniukhin V.V. *Evol'ventnye samotormozhishchiesia peredachi ravnosmeshchennogo zatsepleniia. Elementy i ustroistva robototekhnicheskikh system* [Involute ravnosmeshchennogo self-locking transmission gearing. Elements and devices of robotic systems]. *Mezhvuzovskii sbornik*. Moscow, 1988, pp. 89–92.

12. Reshetov D.N. *Rabotosposobnost nadezhnost detalei mashin* [Performance and reliability of machine parts]. Moscow, Vysshaia shkola publ., 1974. 206 p.

Статья поступила в редакцию 22.01.2013

### Информация об авторе

**ТИМОФЕЕВ Геннадий Алексеевич** (Москва) — доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой «Теория механизмов и машин». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: timga@bmstu.ru).

### Information about the author

**TIMOFEEV Gennady Alekseevich** (Moscow) — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Head of «Theory of Mechanisms and Machines» Department. MSTU named after N.E. Bauman (105005, BMSTU, building 1, 2-nd Baumanskaya 5, Moscow, Russian Federation, e-mail: timga@bmstu.ru).