

# Расчет и конструирование машин

УДК 621.833.6

## Особенности силового нагружения и самоторможения инверсных эвольвентных передач внешнего зацепления

**Г.А. Тимофеев**

*Проанализировано силовое нагружение инверсных цилиндрических самотормозящихся передач (ЦСП) внешнего эвольвентного зацепления. Исследовано самоторможение инверсных ЦСП внешнего зацепления в тяговом режиме прямого хода и в режиме оттормаживания. Показано, что оттормаживание в инверсных передачах всегда осуществимо.*

**Ключевые слова:** самоторможение, самотормозящиеся зубчатые передачи, инверсное зацепление, силы в зацеплении, тяговый режим, оттормаживание.

## Peculiar features of power loading and self-retardation of inverse involute gearings with external engagement

**G.A. Timofeev**

*The article analyzes the power loading of inverse cylindrical self-retarding gears (CSG) with external involute engagement. The self-retardation of inverse CSG with external engagement in a traction mode of a forward stroke and in an retardation mode has been investigated. It is shown that the retardation in inverse gears is always feasible.*

**Keywords:** self-retardation, self-retarding gears, inverse engagement, engagement forces, traction mode, retardation.



**ТИМОФЕЕВ**

**Геннадий Алексеевич**  
доктор технических наук  
профессор  
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

**TIMOFEEV**

**Gennady Alekseevich**  
Dr. Sc. Techn., Professor  
(MSTU named  
after N.E. Bauman)

Слово «торможение» происходит от греческого *tormos*, означающего буквально отверстие для вставки гвоздя, задерживающего вращение колеса. В настоящее время тормозом называют устройство для уменьшения скорости или полной остановки машины [1]. Тормоза блокируют механизм в одном из заданных режимов, например, не допускают движения грузоподъемного механизма под действием груза.

Блокировка в заданном режиме может быть обеспечена и без специального устройства за счет создания в одной из кинематических пар механизма настолько большого сопротивления, что движение становится невозможным. Такое явление получило название самоторможения, оно известно очень давно и получило широкое распространение в червячных и винтовых передачах. В технической литературе встречаются и разные определения самоторможения и различные критерии, описывающие это явление [2–6].

Цилиндрическая косозубая эвольвентная зубчатая передача состоит из шестерни, которую будем считать входным звеном, и колеса, которое будем считать выходным звеном (рисунок). К передаче приложены активные силы: движущий момент  $M_1$  и момент нагрузки  $M_2$ . Считаем заданными коэффициент трения скольжения  $f_{12}$  в зацеплении звеньев. Суммарное воздействие отдельных видов сопротивления движению звеньев: трения качения в зацеплении, трения в опорах, сопротивления среды и прочих — обозначим моментами сопротивления  $L_1$  и  $L_2$ .

В качестве обобщенной координаты данного одноподвижного механизма выберем угол поворота входного звена  $\varphi_1$ . К варьируемым параметрам отнесем угол профиля зуба  $\alpha$  и угол наклона линии зуба  $\beta$ . При этих исходных данных требуется определить зоны самоторможения во всех состояниях передачи.

Цилиндрические зубчатые передачи относят к числу плоских механизмов, поскольку траектории всех их точек лежат в плоскостях, параллельных одной торцовой плоскости. Следовательно, для исследования этих передач достаточно рассмотреть только их торцовые сечения.

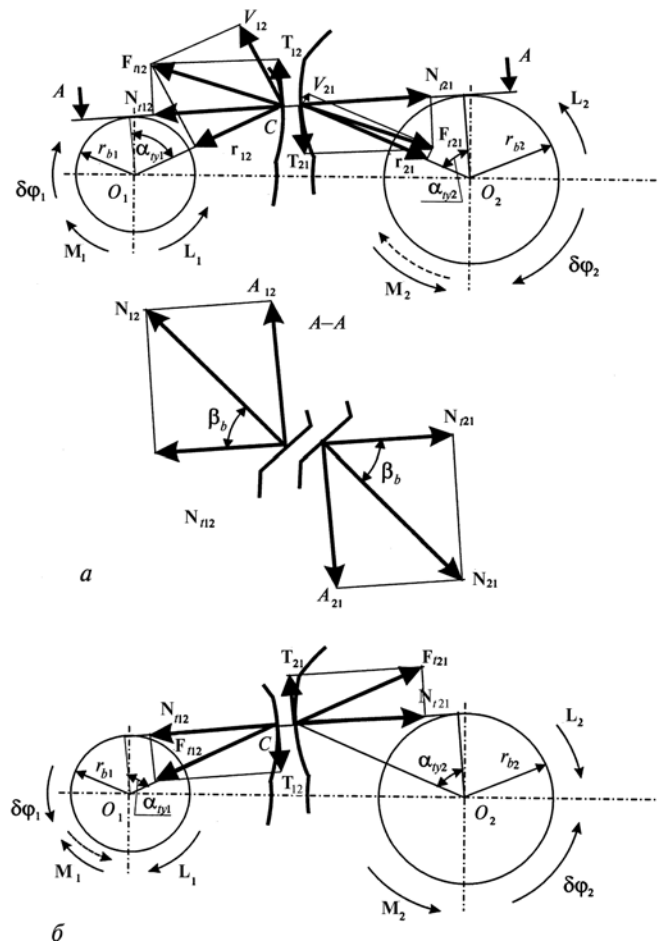


Рисунок. Составляющие нормальной реакции в инверсном зацеплении:  
а — прямой ход; б — обратный ход

На шестерню при любом состоянии передачи действует реакция со стороны колеса —  $F_{12}$ , проекция которой  $F_{t12}$  на торцовую плоскость разложена на нормальную составляющую  $N_{t12}$  и силу трения скольжения  $T_{12}$ . На колесо 2 действует ответная реакция со стороны первого звена  $F_{21}$ , проекция которой  $F_{t21}$  разложена на нормальную составляющую  $N_{t21}$  и силу трения скольжения  $T_{21}$ .

Проекция нормальной составляющей реакции на торцовую плоскость [7]

$$N_t = N \cos \beta_b. \quad (1)$$

По третьему закону Ньютона  $N_{t12} = N_{t21} = N_t$ ;  $T_{12} = T_{21} = T$ . Проекции нормальных составляющих реакций направлены вдоль линии зацепления, касательной к основным окружностям радиусов  $r_{b1}$  и  $r_{b2}$ , силы трения скольжения пер-

пендикулярны этой линии. Направления сил трения определяются из схемы возможных перемещений точек контакта звеньев относительно их относительному перемещению, т. е. сила  $T_{12}$  направлена противоположно относительному перемещению  $\delta r_{12}$ , а сила  $T_{21}$  — противоположно  $\delta r_{12}$ . В свою очередь, сами векторы возможных перемещений перпендикулярны соответствующим радиус-векторам точки контакта, проведенным из точек пересечения осей вращения с торцовой плоскостью  $O_1$  и  $O_2$ . Величина силы трения ограничена неравенством  $T \leq \max T = fN$ .

Вариации радиус-векторов точки контакта по величине:

$$\delta r_1 = r_{y1} \delta \varphi_1; \delta r_2 = r_{y2} \delta \varphi_2. \quad (2)$$

Выразим через обобщенную координату угол поворота выходного звена:

$$\delta \varphi_2 = \delta \varphi_1 \frac{r_{b1}}{r_{b2}}. \quad (3)$$

Затем выразим радиус-векторы точки контакта через радиусы основных окружностей (см. рисунок):

$$r_{y1} = r_{b1} \operatorname{tg} \alpha_{\varphi 1}; \quad r_{y2} = r_{b2} \operatorname{tg} \alpha_{\varphi 2}. \quad (4)$$

С учетом (2) и (3) зависимости (4) примут следующий вид:

$$\delta r_1 = r_{b1} \operatorname{tg} \alpha_{\varphi 1} \delta \varphi_1; \quad \delta r_2 = r_{b1} \operatorname{tg} \alpha_{\varphi 2} \delta \varphi_1. \quad (5)$$

Обобщенная движущая сила, равна в данном случае вращающему моменту:

$$\delta A_M = M_1 \delta \varphi_1. \quad (6)$$

Обобщенная нагрузка представляет собой приведенный момент нагрузки:

$$\delta A_U = \frac{r_{b1}}{r_{b2}} M_2 \delta \varphi_1. \quad (7)$$

Элементарную работу реакций внутренних неидеальных связей представим в следующем виде:

$$\delta A_T^i = \delta A(F_{12}) + \delta A(F_{21}) + \delta A(L_1) + \delta A(L_2). \quad (8)$$

Сумма работ противоположно направленных нормальных составляющих реакций  $N_{12}$  и  $N_{21}$  равна нулю, поскольку проекции возможных перемещений точек их приложения на линию зацепления должны быть равны для обеспечения непрерывного контакта (см. рисунок):

$$\delta r_1 \cos \alpha_{\varphi 1} = \delta r_2 \cos \alpha_{\varphi 2}, \quad (9)$$

поэтому выражение (8) можно переписать:

$$\delta A_T^i = \delta A(T_{12}) + \delta A(T_{21}) - L_1 \delta \varphi_1 - L_2 \delta \varphi_2. \quad (10)$$

Найдем нормальную составляющую  $N_{12} = N_{21} = N$  реакции  $F_{21}$ . Для этого запишем уравнение равновесия колеса 2 в тяговом режиме прямого хода:

$$\begin{aligned} (N_{21} \cos \alpha_{\varphi 2} - T_{21} \sin \alpha_{\varphi 2}) \delta r_{y2} = \\ = (M_2 + L_2) \delta \varphi_2. \end{aligned} \quad (11)$$

С учетом  $T \leq \max T = fN$ , (1) и (2) получаем формулу для нормальной составляющей реакции:

$$N = \frac{M_2 + L_2}{(\cos \beta_b - f_{12}^0 \operatorname{tg} \alpha_{\varphi 2}) r_{b2}}. \quad (12)$$

Через величину нормальной составляющей можно выразить и величину полной реакции  $F_{12} = F_{21} = F$ :

$$F = N \sqrt{(f_{12}^0)^2 + 1}. \quad (13)$$

Из силовой схемы, представленной на рисунке, находим проекции  $A_{12} = A_{21} = A$  нормальных составляющих реакции на ось вращения:

$$A = N \sin \beta_b. \quad (14)$$

Проекция  $F_{12} = F_{21} = F_t$  реакций  $F_{12} = F_{21} = F$  на торцовую плоскость имеют вид:

$$F_t = N \sqrt{(f_{12}^0)^2 + \cos^2 \beta_b}. \quad (15)$$

Окружные  $V_{ij}$  и радиальные  $R_{ij}$  составляющие торцовых проекций:

$$V_{12} = N(-\cos \beta_b \cos \alpha_{\varphi 1} + f_{12}^0 \sin \alpha_{\varphi 1}); \quad (16)$$

$$V_{21} = N(\cos\beta_b \cos\alpha_{\gamma 1} + f_{12}^0 \sin\alpha_{\gamma 2}); \quad (17)$$

$$R_{12} = N(\cos\beta_b \sin\alpha_{\gamma 1} + f_{12}^0 \cos\alpha_{\gamma 1}); \quad (18)$$

$$R_{21} = N(\cos\beta_b \sin\alpha_{\gamma 2} - f_{12}^0 \cos\alpha_{\gamma 2}). \quad (19)$$

Как следует из формул (16)—(19) значение окружных и радиальных составляющих зависят не только от торцового угла профиля колеса, но и от положения точки контакта на линии зацепления, определяющем направление силы трения.

Найдем нормальную составляющую  $N_{12} = N_{21} = N$  реакции  $F_{21}$  в тяговом режиме обратного хода. Для этого запишем уравнение равновесия колеса 2 в этом состоянии:

$$\begin{aligned} (N_{t21} \cos\alpha_{\gamma 2} + T_{21} \sin\alpha_{\gamma 2})\delta r_{y2} = \\ = (M_2 - L_2)\delta\varphi_2. \end{aligned} \quad (20)$$

С учетом  $T \leq \max T = fN$ , (1) и (2) получаем формулу для нормальной составляющей реакции:

$$N = \frac{M_2 - L_2}{(\cos\beta_b + f_{12}^0 \operatorname{tg}\alpha_{\gamma 2})r_{b2}}. \quad (21)$$

Полная реакция и ее осевые и торцовые проекции (13)—(15) сохраняются, а окружные и радиальные составляющие изменяются:

$$V_{12} = N(f_{12}^0 \sin\alpha_{\gamma 1} - \cos\beta_b \cos\alpha_{\gamma 1}); \quad (22)$$

$$V_{21} = N(\cos\beta_b \cos\alpha_{\gamma 2} + f_{12}^0 \sin\alpha_{\gamma 2}); \quad (23)$$

$$R_{12} = N(\cos\beta_b \sin\alpha_{\gamma 1} + f_{12}^0 \cos\alpha_{\gamma 1}); \quad (24)$$

$$R_{21} = N(\cos\beta_b \sin\alpha_{\gamma 2} - f_{12}^0 \cos\alpha_{\gamma 2}). \quad (25)$$

Сопоставление формул (12) и (21) показывает, что при переходе к обратному ходу нормальная реакция, а значит, и полная вместе с осевой и торцовой проекциями, уменьшаются в  $k$  раз:

$$k = \frac{M_2 - L_2}{M_2 + L_2} \frac{\cos\beta_b + f_{12}^0 \operatorname{tg}\alpha_{\gamma 2}}{\cos\beta_b - f_{12}^0 \operatorname{tg}\alpha_{\gamma 2}}. \quad (26)$$

Изменение нагрузки при смене состояния необходимо учитывать при расчете передачи на

прочность и рассчитывать ее для того состояния, в котором силы максимальны.

При исследовании самоторможения цилиндрической передачи внешнего инверсного зацепления в тяговом режиме прямого хода (см. рисунок, а) ведущим звеном является шестерня. Найдем параметр торможения ведомого колеса. Для этого сообщим ему возможное перемещение  $\delta\varphi_2 \neq 0$ , работу при этом совершают торцовая проекция нормальной реакции  $N_{t21}$ , сила  $T_{21}$  трения скольжения, моменты нагрузки  $M_2$  и сил  $L_2$  остальных потерь на трение. Определим знаки работ:

$$\operatorname{sig}(n\delta A)[M_{02}(N_{t21})] = 1;$$

$$\operatorname{sig}(n\delta A)(M_2) = -1; \operatorname{sig}(n\delta A)(L_2) = -1;$$

$$\operatorname{sig}(n\delta A)[M_{02}(\bar{T}_{21})] = -1.$$

Следовательно, сила  $N_{t21}$  является движущей силой, а силы  $T_{21}$ ,  $M_2$  и  $L_2$  относятся к силам сопротивления.

В отличие от внешнего зацепления обычных эвольвентных передач сила  $T_{21}$  трения во внешнем инверсном зацеплении во все время прямого хода совершает отрицательную работу независимо от положения точки контакта на линии зацепления. Следовательно, условие торможения покоя при удерживании передачи от прямого хода определяется формулой

$$\tau_{21}^0|_{M_2=0} = \frac{f_{12}^0 \operatorname{tg}\alpha_{\gamma 2}}{\cos\beta_b} + \frac{L_2}{N_{21}r_{b2} \cos\beta_b} \geq 1, \quad (27)$$

где  $f_{12}^0$  — коэффициент трения покоя в зацеплении.

Если принимать во внимание только трение скольжения в зацеплении, то условие самоторможения (27) принимает следующий вид:

$$\alpha_{\gamma 2} \geq \arctg \frac{\cos\beta_b}{f_{12}^0}. \quad (28)$$

Таким образом, схема сил в инверсных передачах внешнего зацепления в тяговом режиме прямого хода совпадает со схемой сил при доплюсном зацеплении обычных цилиндрических передач, поэтому параметр и условия са-

моторможения в этом режиме тоже совпадают. Однако на этом сходство обычного дополусного и инверсного зацеплений заканчиваются.

Рассмотрим режим оттормаживания, при котором двигатель совместно с нагрузкой преодолевают действие трения. В этом случае направление момента  $M_2$  нагрузки изменится на противоположное (см. рисунок, *a* штриховая линия), направления остальных сил сохранятся. Таким образом, в режиме оттормаживания оба звена являются ведущими при чередовании контактирующих профилей. Следовательно, шестерня тоже должна стать тормозным звеном. Найдем ее параметр торможения. Для этого сообщим ей возможное перемещение  $\delta\varphi_1 \neq 0$ , работу при этом совершают силы  $N_{12}$ ,  $T_{12}$ , моменты двигателя  $M_1$  и сил  $L_1$  остальных потерь на трение. Определим знаки работ:

$$\begin{aligned} \text{sig}(n\delta A)[M_{01}(N_{12})] &= 1; \quad \text{sig}(n\delta A)(M_1) = 1; \\ \text{sig}(n\delta A)(L_1) &= -1; \quad \text{sig}(n\delta A)[M_{01}(T_{12})] = 1. \end{aligned}$$

Следовательно, момент  $M_1$ , силы  $N_{12}$  и  $T_{12}$  являются движущими, и только момент  $L_1$  относится к силам сопротивления. Получаем условие самоторможения в режиме оттормаживания прямого хода [8]:

$$\tau_1^0|_{M_1=0} = \frac{L_1}{N_{12}r_{b1}(\cos\beta_b + f_{12}^0 \text{tg}\alpha_{\gamma 1})} \geq 1. \quad (29)$$

Это неравенство практически нельзя реализовать, поэтому оттормаживание прямого хода в инверсных передачах всегда возможно.

В таблице приведены варианты самоторможения инверсных цилиндрических передач. Условия варианта 011 самоторможения выражены с помощью вспомогательной функции  $G_{1,2}$  [8]:

$$G_{1,2} = \arctg\left(\frac{\cos\beta_b}{f_{12}^0} - \frac{L_{1,2}}{f_{12}^0 N_{12}r_{b1,2}}\right). \quad (30)$$

В тяговом режиме обратного хода (см. рисунок, *б*) ведущим звеном является колесо. После проведения исследования, аналогичного предыдущему, по-

| Вариант самоторможения | Тяговый режим |              | Оттормаживание | Условия существования   |
|------------------------|---------------|--------------|----------------|---|
|                        | Прямой ход    | Обратный ход |                |   |
| 001                    | Нет           | Нет          | Возможно       | $\alpha_{\gamma 1} \geq G_1;$<br>$\alpha_{\gamma 2} \geq G_2$ |
| 011                    | Нет           | Возможен     | Возможно       | $\alpha_{\gamma 1} < G_1;$<br>$\alpha_{\gamma 2} \geq G_2$    |
| 101                    | Возможен      | Нет          | Возможно       | $\alpha_{\gamma 1} \geq G_1;$<br>$\alpha_{\gamma 2} < G_2$    |

лучаем условие самоторможения в режиме оттормаживания обратного хода:

$$\tau_2^0|_{M_2=0} = \frac{L_2}{N_{21}r_{b2}(\cos\beta_b + f_{12}^0 \text{tg}\alpha_{\gamma 2})} \geq 1. \quad (31)$$

Как и неравенство (29), неравенство (31) тоже практически нереализуемое, поэтому оттормаживание прямого хода в инверсных передачах всегда возможно. Условия варианта 101 оттормаживания приведены в таблице. Таким образом, в цилиндрических инверсных передачах внешнего зацепления возможны варианты самоторможения прямого 011 и обратного 101 ходов. Не рассмотренной осталась область, определяемая неравенствами:  $\alpha_{\gamma 1} > G_1;$   $\alpha_{\gamma 2} > G_2$ . Ни прямой, ни обратный ход в тяговом режиме в этой области невозможны. В то же время режим оттормаживания в инверсных передачах возможен всегда. Следовательно, эти условия определяют вариант 001 самоторможения [8].

#### Литература

1. *Крайнев А.Ф.* Словарь-справочник по механизмам. М.: Машиностроение, 1981. 438 с.
2. *Левитский Н.И.* Теория механизмов и машин. М.: Наука, 1979. 576 с.
3. *Турпаев А.И.* Самотормозящие механизмы. М.: Машиностроение, 1976. 208 с.
4. *Панюхин В.И.* Условия самоторможения в зацеплениях механических передач // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 1979. № 11. С. 34–37.
5. *Тимофеев Г.А., Панюхин В.В.* Анализ критериев самоторможения // Вестник машиностроения, 2002. № 9. С. 3–8.
6. *Зак П.С.* К вопросу надежности эффекта самоторможения механизмов // Вестник машиностроения. 1987. № 4. С. 39–42.
7. *Дмитриев В.А.* Детали машин. Л.: Судостроение, 1970. 792 с.
8. *Тимофеев Г.А., Панюхин В.В.* Модификации цилиндрических самотормозящихся передач и варианты самоторможения // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 1986. № 1. С. 51–54.

## References

1. Krainev A.F. *Slovar'-spravochnik po mekhanizamam* [Glossary of the mechanisms]. Moscow, Machine building publ., 1981. 438 p.
2. Levitskii N.I. *Teoriia mekhanizmov i mashin* [Theory of mechanisms and machines]. Moscow, Science Publ., 1979. 576 p.
3. Turpaev A.I. *Samotormoziashchie mekhanizmy* [Self-locking mechanism]. Moscow, Machine building Publ., 1976. 208 p.
4. Paniukhin V.I. Usloviia samotormozheniia v zatsepleniakh mekhanicheskikh peredach [Conditions of self-locking mechanical gears in mesh]. *Izvestiia vysshikh uchebnykh zavedenii. Mashinostroenie*. 1979, no. 11, pp. 34–37.
5. Timofeev G.A., Paniukhin V.V. Analiz kriteriev samotormozheniia [Analysis of the criteria of self-braking]. *Vestnik mashinostroeniia*, 2002, no. 9, pp. 3–8.
6. Zak P.S. K voprosu nadezhnosti effekta samotormozheniia mekhanizmov [On the question of the reliability of the effect of self-locking mechanism]. *Vestnik mashinostroeniia*, 1987, no. 4, pp. 39–42.
7. Dmitriev V.A. *Detali mashin* [Detail of machines]. Leningrad, Shipbuilding publ., 1970. 792 p.
8. Timofeev G.A., Paniukhin V.V. Modifikatsii tsilindricheskikh samotormoziashchikh peredach i varianty samotormozheniia [Modification of cylindrical gear and a self-locking self-locking options]. *Izvestiia vysshikh uchebnykh zavedenii. Mashinostroenie*, 1986, no. 1, pp. 51–54.

Статья поступила в редакцию 23.09.2012

## Информация об авторе

**ТИМОФЕЕВ Геннадий Алексеевич** (Москва) — доктор технических наук, профессор кафедры «Теория механизмов и машин». МГТУ им. Н.Э. Баумана (Россия, 105005, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: timga@bmstu.ru).

## Information about the author

**TIMOFEEV Gennady Alekseevich** (Moscow) — Dr. Sc. Techn., Professor «Theory of Mechanisms and Machines» Department. MSTU named after N.E. Bauman. (BMSTU, building 1, 2-nd Baumanskaya, 5, 105005, Moscow Russia, e-mail: timga@bmstu.ru).