

Определение напряженного состояния гибкого колеса волновой передачи

С.Е. Люминарский

Предложена методика определения напряжений на переходной поверхности зубьев гибкого колеса волновой зубчатой передачи. Методика учитывает пространственную деформацию гибкого колеса и наличие зубьев на них. Внутренние силовые факторы в оболочке гибкого колеса определялись по линейной теории тонких оболочек, напряжения — методом конечных элементов с использованием пространственных тетраэдальных элементов первого порядка.

Ключевые слова: волновая передача, гибкое колесо, жесткое колесо, напряжения, матрица жесткости.

Determination of stress state of the wave transmission flexible wheel

S.E. Lyuminarsky

The technique for determining stresses on the transition surface of teeth of the flexible whom wave gear is presented. The method takes into account the spatial deformation of the flexible wheel and the presence of teeth on them. Internal force factors in the shell of a flexible wheel have been determined by the linear theory of thin shells, stress — the method of finite elements using spatial tetrahedral elements of the first order.

Keywords: wave transmission, flexible wheel, rigid wheel, tension, stiffness matrix.

Нагрузочная способность волновых передач во многом лимитируется усталостной прочностью гибкого колеса (ГК). Исследование этого вопроса посвящены работы Е.Г. Гинзбурга, М.Н. Иванова, С.А. Шувалова, В.И. Рудницкого, М.П. Головина, В.А. Турышева, Н.М. Шолохова, Д.П. Волкова, А.А. Ступакова и других ученых. Работы указанных авторов выполнены более чем 20—30 лет назад, когда вычислительная техника была недостаточно развита. Современные возможности компьютеров позволяют уточнить расчетные методы определения напряжений в ГК и создать уточненную модель его расчета на усталость.

Разработка методики теоретического расчета напряжений в ГК нагруженной передачи требует решения двух задач. Первая задача связана с определением сил, действующих на ГК со стороны жесткого колеса и генератора волн. Во второй задаче необходимо по известным силам определить напряжения в ГК. Сложность определения напряжений в зубчатом венце ГК обусловлена мелкими размерами зубьев



ЛЮМИНАРСКИЙ

Станислав Евгеньевич
кандидат технических
наук, доцент
кафедры «Теории
механизмов и машин»
(МГТУ им. Н.Э.Баумана)
e-mail: katjstas@mail.ru

волновых передач. Обычно при расчете напряжений ГК заменяется гладкой оболочкой, а влияние зубьев учитывается коэффициентом концентрации напряжений.

Предлагаемый способ теоретического определения напряжений в ГК — развитие методики, предложенной С.А. Шуваловым и В.Н. Гореловым [1]. Силы и внутренние силовые факторы в ГК в указанной работе определялись по плоской модели волновой передачи [2]. В этой работе для определения напряжений в зубчатом венце на нем выделялись два плоских зуба. По краям выделенной части прикладывались внутренние силовые факторы. Напряжения в ГК находили путем решения плоской задачи теории упругости методом конечных элементов. Предложенная авторами методика позволяла достаточно точно рассчитывать окружные нормальные напряжения в ГК нагруженной передачи. Однако использование в расчетах плоской модели не позволяет определять касательные напряжения в плоскости, перпендикулярной оси ГК и осевые нормальные напряжения. Кроме того, предложенная методика не учитывает влияние распределения сил по ширине зубчатого венца на напряжения.

В данной статье предлагается уточненная методика определения напряжений в ГК, в которой учитывается распределение сил по поверхностям взаимодействия элементов передачи и пространственный характер деформации ГК.

Предлагаемая методика определения напряжений в ГК нагруженной передачи состоит из трех этапов. На первом этапе находят распределенные по поверхностям силы, действующие на ГК. Для этого используют пространственную модель волновой передачи [3], в которой расчет основывается на методе Бубнова—Галеркина.

На этом этапе расчета ГК с зубчатым венцом заменяется ортотропной оболочкой с эквивалентными жесткостями в области зубчатого венца, которая в дальнейшем называется эквивалентной оболочкой. Эквивалентные жесткости определяются расчетным путем. Для этого выполняются расчеты на растяжение и изгиб полосы с зубом и полосы без зуба с эк-

вивалентной толщиной. Значения эквивалентных жесткостей вычисляют из условия равенства энергий деформаций.

На втором этапе расчета к эквивалентной оболочке прикладываются внешние силы со стороны жесткого колеса и наружного кольца гибкого подшипника, которые были определены на первом этапе расчета. В результате определяют внутренние силовые факторы в оболочке.

Распределенная по поверхности сила взаимодействия ГК с наружным кольцом подшипника на первом этапе расчета представлена в виде линейной комбинации базисных функций [3]:

$$\mathbf{P}^{(2)} = \sum_{k=1}^{N_2} P_k^{(2)} \mathbf{u}_k,$$

где N_2 — количество узлов сетки. Базисные функции \mathbf{u}_k имеют форму шестиугольной пирамиды (рис. 1, а), объем которой равен единице. Коэффициент $P_k^{(2)}$ имеет размерность силы и равен значению равнодействующей рассматриваемой распределенной силы $P_k^{(2)} \mathbf{u}_k$. Вектор $\mathbf{P}^{(2)} = (P_1^{(2)} \dots P_{N_2}^{(2)})^T$, элементами которого являются указанные коэффициенты, называют вектором сил взаимодействия поверхности ГК с поверхностью наружного кольца подшипника.

Распределенная по поверхности сила $\mathbf{p}^{(1)}$, действующая на зубья ГК, представлена в виде линейной комбинации функций \mathbf{u}_j^* [3] :

$$\mathbf{p}^{(1)} \approx \sum_{j=1}^{N_1} P_j^{(1)} \mathbf{u}_j^*.$$

Коэффициент $P_j^{(1)}$ равен модулю равнодействующей распределенной силы $P_j^{(1)} \mathbf{u}_j^*$, приложенной к j -му поперечному сечению. Вектор $\mathbf{P}^{(1)} = (P_1^{(1)} \dots P_{N_1}^{(1)})^T$ называют вектором сил взаимодействия поверхностей гибкого и жесткого колес. Функция \mathbf{u}_j^* (рис. 1, б) равна линейной комбинации базисных функций \mathbf{u}_θ [3]:

$$\mathbf{u}_j^* = \sum_{i=1}^{N_{q_2}} \chi_{ij} \mathbf{u}_{ij}.$$

Суммирование выполняется по всем узлам, расположенным в одном поперечном сечении зуба. Главный вектор этой функции равен единице и направлен по нормали к поверхности. Безразмерные коэффициенты χ_{ij} характеризуют распределение давления по высоте зуба.

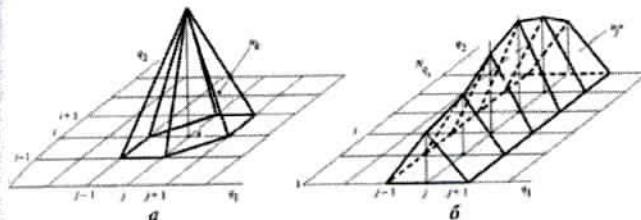


Рис. 1. Общий вид базисной функции u_k (а) и функции u_j^* (б)

Схема нагружения зуба ГК силой $P_j^{(1)} \mathbf{u}_j^*$ представлена на рис. 2. К эквивалентной гладкой оболочке гибкого колеса вместо силы $P_j^{(1)} \mathbf{u}_j^*$ прикладываются распределенные силы \mathbf{q}_r и \mathbf{q}_t , действующие на основание зуба. Для определения сил \mathbf{q}_r , \mathbf{q}_t зуб жесткого колеса жестко закрепляется по основанию, и к нему прикладывается сила $P_j^{(1)} \mathbf{u}_j^*$. Расчеты выполняются методом конечных элементов с использованием пространственных тетраэдральных элементов 1-го порядка [4].

Как показали расчеты, распределенные по поверхности силы \mathbf{q}_r и \mathbf{q}_t можно приближенно заменить тремя распределенными силами \mathbf{q}_r^c , \mathbf{q}_r^h , \mathbf{q}_t с законами распределения, показанными на рис. 3. Максимальные значения сил \mathbf{q}_r^c , \mathbf{q}_t определяются из условия равенства главного

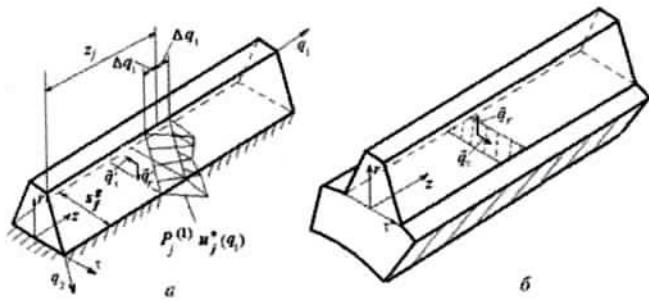


Рис. 2. Схема нагружения ГК распределенной силой $P_j^{(1)} \mathbf{u}_j^*$

вектора этих сил и главного вектора распределенной силы $P_j^{(1)} \mathbf{u}_j^*$:

$$q_{r \max}^c = \frac{P_j^{(1)} \sin(\alpha_j)}{\Delta q_1 S_j^g};$$

$$q_{t \max} = \frac{P_j^{(1)} \cos(\alpha_j)}{\Delta q_1 S_j^g}, \quad (1)$$

где α_j — угол профиля эвольвенты в точке приложения равнодействующей распределенной силы $P_j^{(1)} \mathbf{u}_j^*$; S_j^g — толщина зуба на окружности впадин; Δq_1 — расстояние между узловыми точками вдоль ширины зуба (см. рис. 2).

Равнодействующая распределенной силы $\mathbf{q}_r^h = 0$. Максимальное значение интенсивности этой силы $q_{r \max}^h$ определяют из условия равенства ее главного момента и главного момента распределенной силы $P_j^{(1)} \mathbf{u}_j^*$. Проинтегрировав распределенную силу \mathbf{q}_r^h по площади ее действия, получим

$$q_{r \max}^h = \frac{6M_{o_f}}{\Delta q_1 (S_j^g)^2}, \quad (2)$$

где M_{o_f} — главный момент распределенной силы $P_j^{(1)} \mathbf{u}_j^*$.

Определение внутренних силовых факторов в эквивалентной оболочке ГК выполняется с использованием линейной теории тонких уп-

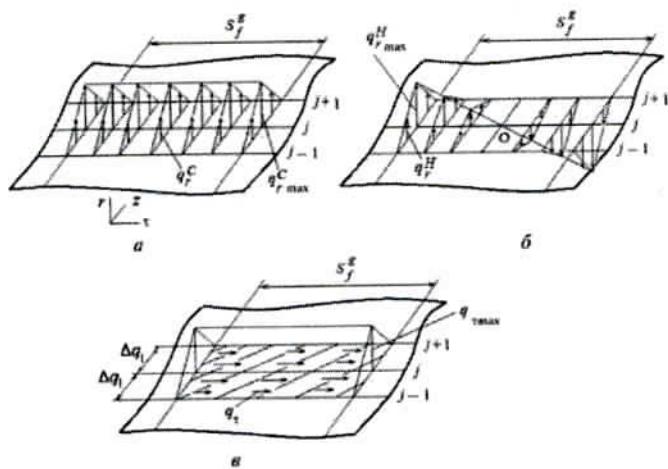


Рис. 3. Законы распределения поверхностных сил q_r^c , q_r^h , q_t :

а — радиальная симметричная сила; б — радиальная кососимметрическая сила; в — касательная сила

ругих ортотропных оболочек [5]. Действующие силы $p^{(1)}$ и $p^{(2)}$ раскладываются в ряд Фурье по ϕ , а по осевой координате z проводится интегрирование методом прогонки.

На третьем этапе расчета из венца ГК выделяются два зуба на длине $\Delta z \leq b_w$, где b_w — ширина зубчатого венца. Выделенная часть показана на рис. 4. На эту часть зубчатого венца прикладываются силы со стороны наружного кольца гибкого подшипника $p^{(2)}$, жесткого колеса $p^{(1)}$ и отброшенной части ГК. Распределенные по поверхностям силы, действующие на выделенную часть ГК со стороны отброшенной части, определяются через внутренние силовые факторы, которые были найдены на втором этапе расчета. Указанные распределенные силы определяют по напряжениям в оболочке:

$$p_{\varphi\varphi} = \frac{T_2}{h} + \frac{12M_2}{h^3}(r - r_{cp});$$

$$p_{zz} = \frac{T_1}{h} + \frac{12M_1}{h^3}(r - r_{cp});$$

$$p_{\varphi r} = \frac{6Q_2 \left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - (r - r_{cp})^2 \right]}{h^3},$$

$$p_{\varphi z} = -\frac{S}{h} - \frac{12H}{h^3}(r - r_{cp});$$

$$p_{rz} = -\frac{6Q_1 \left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - (r - r_{cp})^2 \right]}{h^3},$$

где T_1 , T_2 , S , M_1 , M_2 , H , Q_1 , Q_2 — внутренние нормальные и касательные силы, изгибающие и крутящий моменты и перерезывающие силы, действующие на элемент срединной поверхности эквивалентной оболочки; r — текущая координата, на которой определяются значения распределенных сил; h — толщина эквивалентной оболочки ГК, равная толщине венца ГК во впадине зуба; $r_{cp} = (r_f + r_d)/2$ — средний радиус ГК под зубом; r_f — радиус окружности впадин ГК; r_d — внутренний радиус ГК.

Напряжения на переходной поверхности зуба ГК определяют методом конечных элементов с использованием пространственных тетраэдральных элементов первого порядка [4]. Как показали вычисления, для получения ре-

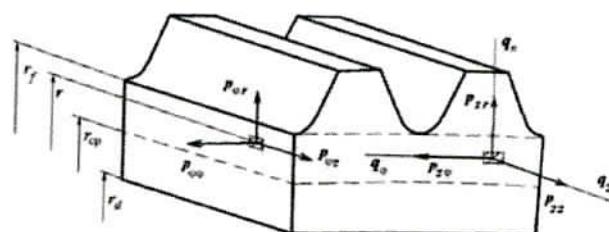


Рис. 4. Выделенная часть ГК

зультатов расчета с погрешностью менее 5...7% необходимо принимать размер элемента не более $0,1m$, где m — модуль зацепления. При такой разбивке выделенной части получается более 100 000 узлов конечно-элементной сетки (300 000 степеней свободы). Матрица жесткости объекта с таким количеством узлов не помещается в оперативной памяти современных ПЭВМ. Для сокращения необходимой оперативной памяти ЭВМ и времени счета выделенная часть разбивается на три области A , B , C (рис. 5). В области A расположены точки, в которых определяются напряжения. Она разбивается на элементы с размерами менее $0,1m$. Области B и C представляют собой объединенный суперэлемент с узлами, расположенными на границе областей B и A , C и A .

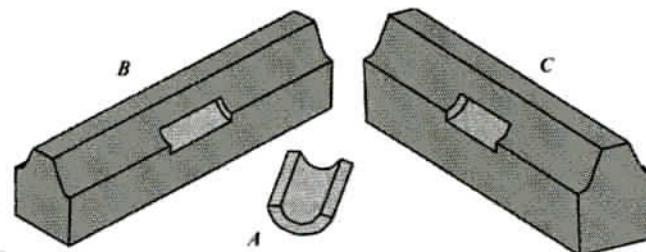


Рис. 5. Области выделенной части гибкого колеса

Матрица жесткости выделенной части имеет ленточную структуру. Для уменьшения ширины ленты матрицы жесткости узлы нумеруются следующим образом:

- 1) нумеруют узлы, принадлежащие суперэлементу;
- 2) находят элементы области A , которым принадлежат ранее пронумерованные узлы;
- 3) нумеруют ненумерованные узлы, принадлежащие найденным элементам в п. 2;
- 4) последовательно повторяют п. 2 и 3 до тех пор, пока не будут пронумерованы все узлы.

Для пояснения последовательности расчета введем следующие обозначения: \mathcal{A} — множество узлов, принадлежащих области A ; \mathcal{B} — множество узлов, принадлежащих области B ; \mathcal{C} — множество узлов, принадлежащих области C .

Для уменьшения необходимой оперативной памяти ЭВМ вычисления выполняют в такой последовательности:

- 1) область B разбивается на пространственные элементы с размерами $(0,25 \dots 0,75)m$ и закрепляется во всех направлениях в узлах, принадлежащих множеству $(\mathcal{B} \cap \mathcal{A}) \cup (\mathcal{B} \cap \mathcal{C})$. К рассматриваемой области B прикладываются внешние силы со стороны жесткого колеса, гибкого подшипника и отброшенной части ГК. В результате расчета определяются реакции в узлах закрепления N_B и матрица жесткости первого суперэлемента, узлы которого совпадают с узлами закрепления. В оперативной памяти хранится только матрица жесткости области B ;

- 2) аналогичные расчеты выполняют для области C . В результате определяются реакции в узлах закрепления N_C и матрица жесткости второго суперэлемента. Узлы закрепления принадлежат множеству $(\mathcal{C} \cap \mathcal{A}) \cup (\mathcal{B} \cap \mathcal{C})$. В оперативной памяти хранится только матрица жесткости области C ;

- 3) определяют матрицу жесткости объединенного суперэлемента областей B и C . Этот суперэлемент закрепляется во всех узлах, принадлежащих множеству $(\mathcal{B} \cap \mathcal{A}) \cup (\mathcal{C} \cap \mathcal{A})$. К объединенному суперэлементу прикладывается вектор узловых сил $\mathbf{N} = -N_B - N_C$. В результате расчета определяются реакции в узлах закрепления N_A . В оперативной памяти хранится только матрица жесткости объединенного суперэлемента;

- 4) формируется матрица жесткости всей выделенной части ГК, которая состоит из матрицы жесткости объединенного суперэлемента с узлами, принадлежащими множеству $(\mathcal{B} \cap \mathcal{A}) \cup (\mathcal{C} \cap \mathcal{A})$ и матрицы жесткости области A . Нумерация узлов указана выше. Выделенная область закрепляется таким образом, чтобы реакции в связях образовывали статически определимую систему сил. Тогда при приложении к выделенной части ГК уравновешенной системы сил реакции в связях будут равны нулю и не окажут влияния

на определяемые напряжения. В узлах объединенного суперэлемента прикладывается вектор узловых сил \mathbf{N}_A . От действия этих сил определяются напряжения на переходной поверхности зуба ГК. В оперативной памяти хранятся только матрицы жесткости объединенного суперэлемента и области A .

По предложенной методике выполнен расчет волновой зубчатой передачи с кулачковым генератором волн со следующими основными параметрами: $Z_g = 200$, $Z_B = 202$, $m = 0,8$ мм, $X_g = 3,75$, $X_B = 3,70$, $D = 160$ мм, $L = 160$ мм, $D_{ag} = 166,32$ мм, $D_{ab} = 166,32$ мм, $h = 1,92$ мм, $b_w = 32$ мм, $b_p = 24$ мм, $w_0 = 0,76$ мм. Здесь Z_g, Z_B, X_g, X_B — числа зубьев и коэффициенты смещения гибкого и жесткого колес; D — внутренний диаметр ГК; L — длина ГК; b_w — ширина зубчатого венца ГК; h — толщина ГК под зубом; b_p — ширина гибкого подшипника; w_0 — максимальная радиальная деформация зубчатого венца в среднем сечении.

Максимальные напряжения расположены вблизи точек сопряжения переходных поверхностей зубьев с поверхностью впадин ГК [1]. Поэтому во всех приведенных ниже зависимостях показаны напряжения в указанных точках. Зависимость окружных нормальных напряжений в трех сечения ($z = 4, 11$ и 28 мм) от положения зубьев относительно большой оси кулачка при моменте на выходном валу $M_c = 800$ Н·м показана на рис. 6. Положение зубьев определяется углом φ . Угол φ отсчитывается от большой оси кулачка, координата z — от внутреннего торца зубчатого венца. Всплески напряжений возникают в сечениях, расположенных под шариками гибкого подшипника.

Зависимость осевых нормальных напряжений от угла φ представлена на рис. 7. Максимальные значения этих напряжений возникают в точках, расположенных под телами качения гибкого подшипника, и достигают значения 110 МПа. Причем максимумы окружных и осевых нормальных напряжений расположены в одних и тех же точках.

Зависимости нормальных окружных и осевых напряжений от осевой координаты z при $\varphi = 24,3^\circ$ приведены на рис. 8. В точках, расположенных под этим углом, напряжения прини-

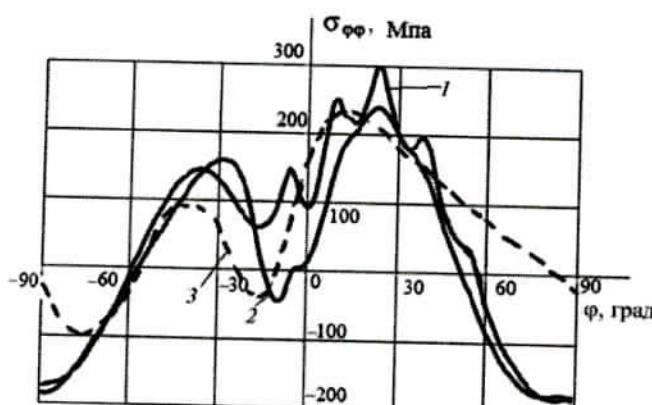


Рис. 6. Окружные нормальные напряжения:
1 — $z = 11$ мм; 2 — $z = 28$ мм; 3 — эксперимент [6]

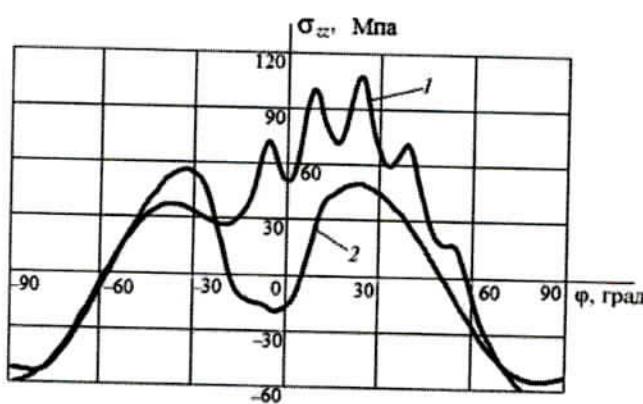


Рис. 7. Осевые нормальные напряжения:
1 — $z = 11$ мм; 2 — $z = 28$ мм

мают максимальные значения. На представленных зависимостях видно, что при $\phi = \text{const}$ напряжения принимают наибольшие значения в точках, находящихся под телами качения гибкого подшипника ($z = 11$ мм).

Выводы

- Предложена методика расчета напряжений на переходной кривой зuba ГК, учитывающая пространственный характер деформации гибкого колеса.

- Расчетным путем показано, что в точках ГК, расположенных под телами качения гибкого подшипника, происходит значительное увеличение напряжений. Для правильного учета всплеска напряжений под телами качения необходимо учитывать контактную деформацию поверхности взаимодействия ГК и гибкого подшипника.

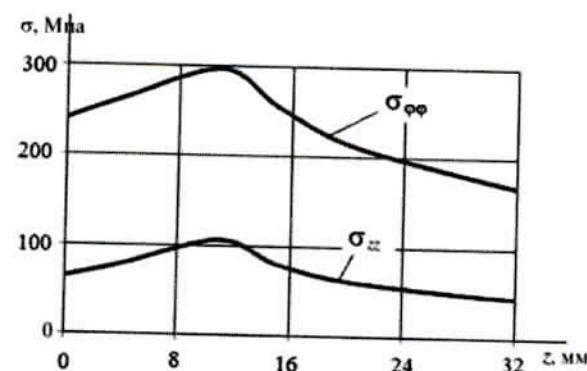


Рис. 8. Распределение напряжений по ширине зубчатого венца при $\phi = 24,3^\circ$

- Оевые нормальные напряжения составляют приблизительно 30% от окружных нормальных напряжений. Поэтому осевые напряжения необходимо учитывать при расчете на усталостную прочность.

- Касательные напряжения значительно меньше нормальных напряжений и поэтому при расчете на прочность могут не учитываться.

- Предложенная методика позволяет исследовать влияние различных параметров ГК на напряжения в нем.

Литература

- Шувалов С.А., Горелов В.Н. Исследование напряжений в гибком зубчатом венце методом конечных элементов // Вестник машиностроения. 1983. № 1. С. 9—11.
- Шувалов С.А. Расчет сил, действующих на звенья волновой передачи // Вестник машиностроения. 1979. № 10. С. 5—9.
- Люминарский С.Е., Люминарский И.Е. Расчет сил взаимодействия элементов волновой зубчатой передачи // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2011. Спец. вып. «Энергетическое и транспортное машиностроение». С. 230—240.
- Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов: Справочник / В.И. Мяченков, В.И. Мальцев, В.П. Майборода и др.; Под общ. ред. В.И. Мяченкова. М.: Машиностроение, 1989. 520 с.
- Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962. 420 с.
- Сорокин А.Н. Исследование и расчет волновой зубчатой передачи с учетом растяжения гибкого колеса. Автореферат дисс. ... канд. техн. наук. М., 1980. 16 с.

Статья поступила в редакцию 17.09.2012